

**Partie A**

L'aire de la ZONE 1 est l'aire du triangle OKJ. C'est un triangle rectangle isocèle en J on a donc :

$$\text{aire (ZONE 1)} = \text{aire (OKJ)} = \frac{OJ \times JK}{2} = \frac{1 \times 1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

L'aire de ZONE 2 est l'aire sous la courbe de la fonction carré entre 0 et 1 :

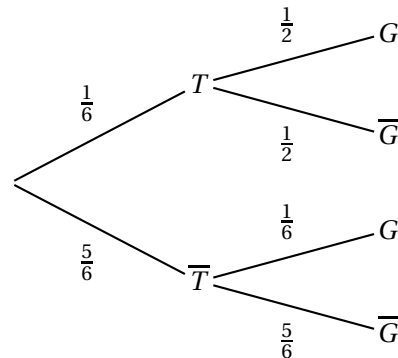
$$\text{aire (ZONE 2)} = \int_0^1 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{3}}.$$

• L'aire de la ZONE 3 est la différence entre l'aire du carré OIJK et la somme des aires de la ZONE 1 et de la ZONE 2 :

$$\text{aire (ZONE 3)} = 1 - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = 1 - \left( \frac{3}{6} + \frac{2}{6} \right) = \frac{6}{6} - \frac{5}{6} = \boxed{\frac{1}{6}}.$$

**Partie B**

1. On représente la situation par un arbre pondéré.



2. Les évènements  $T$  et  $\bar{T}$  forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(G) &= P(T \cap G) + P(\bar{T} \cap G) = P(T) \times P_T(G) + P(\bar{T}) \times P_{\bar{T}}(G) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12} + \frac{5}{36} = \frac{3}{36} + \frac{5}{36} \\ &= \frac{8}{36} = \frac{4 \times 2}{4 \times 9} = \boxed{\frac{2}{9}}. \end{aligned}$$

3. On veut déterminer la probabilité  $P_G(T)$  :

$$P_G(T) = \frac{P(T \cap G)}{P(G)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{2}{9}} = \frac{1}{12} \times \frac{9}{2} = \boxed{\frac{3}{8}}.$$

**Partie C**

1. a. La loi de probabilité de  $X_1$  est :

$x_i$	1	2	3
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

On a donc :

$$E(X_1) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = \boxed{\frac{5}{3}}.$$

- b. On calcule la variance en utilisant la formule de König :

$$\begin{aligned} V(X_1) &= E(X_1^2) - [E(X_1)]^2 \\ &= 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{3} + 3^2 \times \frac{1}{6} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{9}{6} - \frac{25}{9} = \frac{9}{18} + \frac{24}{18} + \frac{27}{18} - \frac{50}{18} = \frac{10}{18} \\ &= \boxed{\frac{5}{9}} \end{aligned}$$

2. a. L'évènement  $\{Y = 9\}$  correspond à  $\{X_1 = 3\} \cap \{X_2 = 3\} \cap \{X_3 = 3\}$ .  
Donc, comme les variables  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$  sont indépendantes :

$$P(Y = 9) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{216}}.$$

- b. D'après la linéarité de l'espérance :

$$E(Y) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = \frac{5}{3} + \frac{5}{3} + \frac{5}{3} = \boxed{5}$$

- c. Puisque les variables aléatoires  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$  sont indépendantes, on peut utiliser l'additivité de la variance :

$$V(Y) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) = \frac{5}{9} + \frac{5}{9} + \frac{5}{9} = \frac{15}{9} = \frac{3 \times 5}{3 \times 3} = \boxed{\frac{5}{3}}.$$